UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH — Année 2019/2020
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES DE FÈS
CYCLE PRÉPARATOIRE — CP1 S_2
MATIÈRE : ALGBREII

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIE 5

Exercice 1 Déterminer pour chacune des matrices suivantes, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres, puis dire si elles sont dagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Exprimer alors chacune des matrices diagonalisables en fonction d'une matrice diagonale.

$$A_1=\begin{pmatrix}3&4&-4\\-2&-1&2\\-2&0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}-2&5&7\\-1&6&9\\0&-2&-3\end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soient a,b et c trois nombres complexes. Diagonaliser :

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad et\quad \begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$$

Exercice 3 Trouver a,b,c,a',b' et c', des nombres réels, pour que :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a'\\1&b&b'\\1&c&c'\end{pmatrix}\text{ admette }\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\text{ pour des vecteurs propres.}$$

Exercice 4 Soit $t\in\mathbb{R}$ et $A=\begin{pmatrix}3&1&1+t\\0&2&-1-t\\1&1&4+2t\end{pmatrix}$.
A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0=-4,\ \ u_1=-1\ \text{ et }\ (\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+2}+3u_{n+1}-u_n).$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=AU_n$.
2. Trouver une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constituée des vecteurs propres de A et déterminer les coordonnées de U_0 dans cette base.
3. En déduire U_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E. ϕ_α est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

I- Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ_α et donner une base du sous-espace propre $E_\alpha(1)$ (discuter suivant les valeurs de α).

II- On pose $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$.

a- Préciser la dimension du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1 et f_2.

b- Montrer que F est stable par ϕ_α.

c- On note φ_α l'endomorphisme de F induit par ϕ_α, c'est à dire défini par :

$$(\forall u \in F), \ \ \varphi_\alpha(u) = \phi_\alpha(u).$$

Donner la matrice de φ_α dans la base (f_1, f_2).

III- Montrer que $\alpha - 1$ est une valeur propre de ϕ_α et que l'on peut trouver un vecteur f_3 de E, indépendant de α qui soit un vecteur propre de ϕ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

IV- Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et trouver une matrice de ϕ_α dans cette base. ϕ_α est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que c est tel que : $(\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, $X^T M X \geq 0$.

1- M est-elle diagonalisable ?

2- Montrer que toutes les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

3- $a-$ Déterminer les valeurs propres et sous espaces propres associés à M.

$b-$ Soient X, Y deux vecteurs propres de M associés à des valeurs propres distincts λ et μ. Montrer que : $X^T y = 0$.

$c-$ Montrer que $c \in [\frac{-1}{2}, 1]$.

$d-$ Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de M^n en fonction de n.